Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Insiemi connessi per archi

Definizione 1. *Diciamo che un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è* **connesso per archi (c.p.a.)** *se per ogni coppia di punti $X, Y \in \mathbb{R}^d$, esiste una funzione continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ (detta* **arco** *o* **curva***) tale che*

$$\gamma(0) = X, \qquad \gamma(1) = Y, \qquad \gamma(t) \in \Omega \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0,1].$$

Osservazione 2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme connesso per archi e se $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua, allora anche l'insieme $F(\Omega)$ è connesso per archi.*

Teorema del valore intermedio

Teorema 3 (Teorema del valore intermedio)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme connesso per archi e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni numero reale $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\inf_\Omega F < c < \sup_\Omega F,$$

esiste un punto $X_c \in \Omega$ tale che $F(X_c) = c$.

Insiemi aperti connessi per archi

Teorema 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto. Allora Ω è connesso per archi se e solo se vale la proprietà seguente: non esistono due aperti A_1 e A_2 in $\mathbb{R}^d$ tali che:*

(1) $A_1 \neq \emptyset$ *e* $A_2 \neq \emptyset$*;*

(2) A_1 *e* A_2 *sono disgiunti:* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*;*

(3) $\Omega = A_1 \cup A_2$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$). Supponiamo per assurdo che A_1 e A_2 sono due aperti che soddisfano le proprietà (1), (2) e (3). Prendiamo due punti $X_1 \in A_1$ e $X_2 \in A_2$. Sia $\sigma : [0,1] \to \Omega$ un arco che collega X_1 a X_2, ovvero:

$$\sigma(0) = X_1, \qquad \sigma(1) = X_2, \qquad \sigma(t) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,1].$$

Sia

$$T = \sup\Big\{t \in [0,1] \ : \ \sigma(t) \in A_1\Big\}.$$

Dimostreremo che

$$\sigma(T) \notin A_1 \qquad \text{e} \qquad \sigma(T) \notin A_2.$$

Supponiamo per assurdo che $\sigma(T) \in A_2$. Per la continuità di σ e il fatto che A_2 è un aperto, abbiamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\sigma(s) \in A_2 \quad \text{per ogni} \quad s \in (T - \varepsilon\,, T + \varepsilon),$$

il che contraddice la definizione di T. Quindi $\sigma(T) \notin A_2$. In particolare, $T < 1$.

Supponiamo che $\sigma(T) \in A_1$. Siccome A_1 è aperto e $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ è continua, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\sigma(s) \in A_1 \quad \text{per ogni} \quad s \in (T - \varepsilon\,, T + \varepsilon),$$

il che di nuovo contraddice la definizione di T come estremo superiore. Quindi $\sigma(T) \notin A_2$.

In conclusione, abbiamo trovato un punto

$$\sigma(T) \in \Omega \setminus (A_1 \cup A_2),$$

il che vuol dire che non esistono due insiemi A_1 e A_2 con le proprietà (1), (2) e (3).

Dimostriamo ora la freccia ($\Leftarrow$). Sia $X_0 \in \Omega$ un punto fissato. Definiamo l'insieme

$$A := \Big\{ X \in \Omega \ :\ \text{esiste una curva } \sigma : [0,1] \to \Omega \text{ che collega } \sigma(0) = X_0 \text{ a } \sigma(1) = X \Big\}$$

Dimostreremo che gli insiemi A e $\Omega \setminus A$ sono entrambi aperti. Useremo la seguente proposizione.

Osservazione 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme dato e $X_0 \in \Omega$. Supponiamo che i punti $X, Y \in \Omega$ siano tali che:*

- *esiste una curva $\sigma : [0,1] \to \Omega$ che collega $\sigma(0) = X_0$ a $\sigma(1) = X$;*
- *il segmento*

  $$[X,Y] := \Big\{ X + s(Y - X) \ :\ s \in [0,1] \Big\},$$

  è contenuto in Ω.

Allora, la curva

$$\gamma : [0,2] \to \Omega :, \qquad \gamma(t) := \begin{cases} \sigma(t) & \textit{per} \quad t \in [0,1], \\ X + (t-1)(Y - X) & \textit{per} \quad t \in [1,2], \end{cases}$$

collega X_0 a Y.

Dimostriamo ora che A è aperto. Sia $X \in A$. Per la definizione di A abbiamo che $X \in \Omega$ e che esiste un arco che collega X_0 a X (in Ω). Per il fatto che Ω è aperto, abbiamo che esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset \Omega$. Per ogni punto $Y \in B_r(X)$ sappiamo che il segmento $[X,Y]$ è contenuto in $B_r(X)$ e quindi anche in Ω; per l'osservazione precedente, possiamo trovare un arco che collega X_0 a Y. Si ha quindi che $Y \in A$. Siccome Y era un punto qualsiasi di $B_r(X)$, otteniamo che $B_r(X) \subset A$.

Rimane da dimostrare che anche $\Omega \setminus A$ è aperto. Sia $X \in \Omega \setminus A$. Siccome Ω è aperto, abbiamo che esiste un raggio $r > 0$ tale che $B_r(X) \subset \Omega$. Sia $Y \in B_r(X)$ un punto qualsiasi. Se per assurdo $Y \in A$, allora esisterebbe una curva che collega X_0 a Y in Ω. D'altra parte, il segmento $[Y,X]$ è contenuto in $B_r(X)$ e quindi anche in Ω. Per l'osservazione di sopra si avrebbe che $X \in A$, ma questo è impossibile perché l'ipotesi di partenza era $X \in \Omega \setminus A$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\text{se } Y \in B_r(X), \text{ allora } Y \notin A,$$

il che vuol dire che $B_r(X) \subset \Omega \setminus A$.

In conclusione, abbiamo dimostrato che la coppia di insiemi $A_1 := A$ e $A_2 := \Omega \setminus A$ è una coppia di insiemi aperti. Osserviamo che per ipotesi $A \neq \emptyset$ (contiene il punto X_0) e per costruzione si ha:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \qquad \text{e} \qquad A_1 \cup A_2 = \Omega.$$

Siccome abbiamo che per ipotesi non possono esistere due insiemi aperti tali che:

- $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$,
- A_1 e A_2 sono disgiunti: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
- $\Omega = A_1 \cup A_2$,

dobbiamo necessariamente avere che $A_2 = \emptyset$, ovvero $\Omega = A$. $\square$